Πανεπιστημιο Ιωαννινων, Τμημα Μαθηματικων,
Εισαγωγη στη Μαθηματικη Φυσικη,
διδασκων: Μ. Ξενος

04/02/2016

Θέματα

1. (α) Να δώσετε τον ορισμό του ιδιοδιανύσματος, $|f>$, και της ιδιοτιμής, λ, ενός τελεστή $A \neq I$ (1 μονάδα).

(β) Έστω ο τελεστής $A = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ στο χώρο των συναρτήσεων που είναι συνεχώς παραγωγίσιμες για $x \in [0, L]$. (i) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του τελεστή αν $u(0) = u(L) = 0$. (ii) Ποιά είναι η φυσική σημασία του προβλήματος; (1.5 μονάδες)

2. Θεωρείστε τις συναρτήσεις $\Gamma(x)$ και $B(x)$. Να δείξετε ότι:

(α) Για $m, n > 0$, ισχύει $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

(β) Αν $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$, τότε $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin(p\pi)}$ για $0 < p < 1$.

(γ) Με βάση τον ορισμό $B(m,n) = B(n,m)$, να επαληθεύσετε το ερώτημα (α). (2.5 μονάδες)

3. Θεωρείστε τη χρονοεξαρτημένη εξίσωση Schrödinger: $i\hbar\dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\right)\Psi$, με $\Psi = \Psi(x,t)$. Όπου m η μάζα του κβαντικού σωματιδίου και $\hbar$ η σταθερά του Planck.

(α) Να επιλύσετε την παραπάνω εξίσωση με σταθερά χωρισμού E (ενέργεια του κβαντικού σωματιδίου) και συνοριακές συνθήκες $\Psi(0) = \Psi(L) = 0$. Θεωρήστε ότι η συνάρτηση δυναμικού είναι της μορφής: $V(x) = \dfrac{2m}{\hbar^2}v(x)$, όπου $v(x) = \begin{cases} 0, \ 0 < x < L \\ \infty, \ x < 0, \ x > L \end{cases}$ (1.5 μονάδες).

(β) Τι γνωρίζετε για την συνάρτηση Ψ; Ποιά είναι η φυσική σημασία του παραπάνω προβλήματος; (1 μονάδα)

4. Θεωρείστε τα πολυώνυμα Hermite, $H_n(x)$, με γεννήτρια συνάρτηση $e^{2tx-t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}t^n$.
Να δείξετε ότι:

(α) Ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση $y'' - 2xy' + 2ny = 0$.

(β) $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$.

(γ) Είναι ορθογώνια με συνάρτηση βάρους $w(x) = e^{-x^2}$.

(δ) Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης του ερωτήματος (α) για $n = 1$. (2.5 μονάδες)

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

Καλη Επιτυχια!